

CHƯƠNG I
MA TRẬN - ĐỊNH THỨC

§1. MA TRẬN

I. KHÁI NIỆM

I.1. Ma trận cấp $m \times n$: m, n là hai số tự nhiên. Một ma trận cấp $m \times n$ là một bảng gồm $m \times n$ số, ký hiệu a_{ij} , được sắp xếp thành m dòng và n cột dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

a_{ij} là phần tử ở dòng i và cột j của ma trận A ; i là chỉ số dòng, j là chỉ số cột của phần tử a_{ij} đó. Người ta thường viết tắt ma trận ở dạng $A = [a_{ij}]_{m \times n}$.

Ví dụ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận cấp 2×3 , trong ma trận này ta có phần tử $a_{13} = 3, a_{21} = 4$.

I.2. Ma trận bằng nhau : Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu :

- chúng có cùng cấp
- các phần tử tương ứng đều bằng nhau

I.3. Ma trận chuyển vị

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Ma trận thu được từ A bằng cách viết các dòng của A lần lượt thành các cột được gọi là ma trận chuyển vị của A và kí hiệu là A^t . Khi đó A^t là ma trận cấp $n \times m$.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Thế thì $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Hiển nhiên ta có $(A^t)^t = A$.

II. CÁC LOẠI MA TRẬN

II.1. Ma trận vuông : là ma trận có số dòng m bằng số cột n , khi đó thay vì nói ma trận cấp $n \times n$ ta chỉ nói đó là ma trận vuông cấp n .

Trong ma trận vuông cấp n , người ta gọi các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ là các phần tử thuộc đường chéo chính của ma trận.

II.2. Ma trận đối xứng : là ma trận vuông, trong đó hai phần tử đối xứng qua đường chéo chính thì bằng nhau, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$ với mọi $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Ví dụ. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ là các ma trận đối xứng.

II.3. Ma trận tam giác : là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới, hoặc tất cả các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ. $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ là các ma trận tam giác.

II.4. Ma trận chéo: là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo.

II.5. Ma trận đơn vị : là ma trận chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1. Ma trận đơn vị cấp n kí hiệu là I_n .

II.6. Ma trận cột: là ma trận chỉ có một cột.

II.7. Ma trận dòng: là ma trận chỉ có một dòng.

II.8. Ma trận-không: là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0. Ma trận-không cấp $m \times n$ kí hiệu là

II.9. Ma trận bậc thang: là ma trận thỏa mãn hai điều kiện sau đây

- dòng có tất cả các phần tử đều bằng 0 (nếu có) nằm phía dưới dòng có phần tử khác 0;
- phần tử khác 0 đầu tiên (tính từ trái sang phải) của mỗi dòng dưới nằm bên phải so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên.

Ví dụ. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ là các ma trận bậc thang.

III. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

III.1. Tổng (hiệu) hai ma trận cùng cấp

Tổng hai ma trận cùng cấp $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$ là một ma trận cùng cấp $C = [c_{ij}]_{m \times n}$ trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ký hiệu $C = A + B$.

Hiệu hai ma trận cùng cấp $A = [a_{ij}]_{m \times n}, B = [b_{ij}]_{m \times n}$ là một ma trận cùng cấp $D = [d_{ij}]_{m \times n}$ trong đó $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Ký hiệu $D = A - B$.

Ví dụ. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Thế thì $C = A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}, D = A - B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{bmatrix}$

Chú ý. Hai ma trận chỉ cộng, trừ được với nhau khi chúng có cùng cấp.

III.2. Tích của ma trận với một số

Cho số α và ma trận $A = [a_{ij}]_{m \times n}$. Tích của α với ma trận A là ma trận $B = [b_{ij}]$ cùng cấp với A trong đó $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ (nói cách khác, B thu được từ A bằng cách nhân mọi phần tử của A với α)

Kí hiệu $B = \alpha A$.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\alpha = 2$. Thế thì $B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Ví dụ. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận sau:

- a) $3A$ b) $-4B$ c) $2A + 3B$ d) $-4A + 2B$

III.3. Tích của hai ma trận

Cho hai ma trận $A = [a_{ip}]_{m \times k}$, $B = [b_{pj}]_{k \times n}$. Tích của ma trận A với ma trận B là ma trận

$C = [c_{ij}]_{m \times n}$ cấp $m \times n$ trong đó phần tử c_{ij} được tính theo công thức

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pj}.$$

Kí hiệu $C = AB$.

Ví dụ. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Thế thì $C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai. Ta tính các phần tử của C . Ta có

$$c_{11} = 1.2 + (-2).(-1) + 3.4 = 16 \quad c_{12} = 1.3 + (-2).1 + 3.2 = 7$$

$$c_{21} = 4.2 + 0.(-1) + 2.4 = 16 \quad c_{22} = 4.3 + 0.1 + 2.2 = 16$$

Vậy $C = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$.

Ví dụ. Thực hiện phép nhân hai ma trận sau đây:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Chú ý

- Hai ma trận chỉ nhân được với nhau khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai.
- Muốn tìm phần tử ở dòng i , cột j của ma trận tích $C = AB$, ta nhân các phần tử ở dòng i của ma trận A lần lượt với các phần tử ở cột j của ma trận B rồi cộng các tích đó lại.
- Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán (nói chung là $AB \neq BA$, thậm chí có khi tồn tại AB nhưng không tồn tại BA).

- Thứ tự thực hiện các phép toán trên ma trận tương tự như đối với các số: nhân trước, cộng sau.

Ví dụ 19. Thực hiện phép toán sau đây:

$$a) 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c) \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^t \cdot \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}^t$$

$$d) 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

§2. ĐỊNH THỨC

I. KHÁI NIỆM

I.1. Định thức cấp một: là định thức của ma trận vuông cấp một $A = [a_{11}]$, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, được tính như sau :

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Ví dụ. $A = [4], \det A = 4; B = [-3], \det B = -3$

I.2. Định thức cấp hai: cho ma trận vuông cấp hai $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Định thức của A , gọi là định

thức cấp 2, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là số được tính theo công thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \det A = 2 \cdot 7 - 4 \cdot 3 = 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 - 5 \cdot 4 = -26$$

I.3. Định thức cấp ba: cho ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Định thức của A , gọi là định

thức cấp 3, ký hiệu $\det A$ hay $|A|$, là số được tính theo công thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 0 \cdot 2 -$$

$$- (-3) \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) = 9$$

Ví dụ. Tính các định thức sau

$$a) \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

II. CÁC TÍNH CHẤT

Định thức cấp bất kì có các tính chất sau đây.

1. $\det A = \det A^t$ (Hai ma trận chuyển vị có định thức bằng nhau).

Ví dụ. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. Định thức có một dòng gồm toàn số 0 thì bằng 0.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

3. Định thức có hai dòng giống nhau hoặc tỉ lệ với nhau thì bằng 0.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

4. Nếu nhân một dòng với một số α thì định thức cũng được nhân lên với α . Suy ra: nhân tử chung của một dòng có thể đem ra ngoài định thức.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. Nếu đổi chỗ hai dòng bất kì thì định thức đổi dấu.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. Định thức không hay đổi nếu cộng các phần tử của một dòng với các phần tử tương ứng của dòng khác đã được nhân với cùng một số
(Định thức không hay đổi, nếu thay một dòng bởi tổng của dòng đó với bội của một dòng khác)

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

7. Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính.

Ví dụ. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1.4.6; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2.4.7$

8. Các tính chất trên vẫn đúng khi thay chữ “dòng” bởi chữ “cột”.

III. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MA TRẬN

Sử dụng các tính chất trên, ta có thể tính được một định thức cấp cao bằng cách biến đổi để đưa nó về định thức tam giác. Muốn thế, ta sử dụng các phép biến đổi sau đây :

- Đổi chỗ hai dòng tùy ý của ma trận.
- Nhân tất cả các phần tử của một dòng với một số khác 0.
- Cộng vào một dòng các phần tử tương ứng của dòng khác đã được nhân với cùng một số.

Các phép biến đổi này gọi là phép biến đổi sơ cấp dòng. Tương tự, thay chữ “dòng” bởi chữ “cột”, ta có các phép biến đổi sơ cấp cột. Những phép biến đổi sơ cấp dòng và cột gọi chung là phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.

Ví dụ.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

Ví dụ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$$

Ví dụ. Tính định thức của ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \\ 0 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & -25 & 21 \\ 0 & 0 & -25 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ. Hãy tính các định thức sau

$$a) \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}; c) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}; d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

I. KHÁI NIỆM

Định nghĩa: Cho $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n . Ma trận B thỏa mãn điều kiện $AB = BA = I_n$

được gọi là ma trận nghịch đảo của A và kí hiệu là $B = A^{-1}$.

Chú ý: Nếu $B = A^{-1}$ thì $B^{-1} = A$. Do đó ta còn nói A và B là các ma trận nghịch đảo của nhau.

Định nghĩa: Nếu ma trận A có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì ta nói A là ma trận khả nghịch, hay khả đảo.

II. ĐIỀU KIỆN KHẢ NGHỊCH

Định lý 1: Ma trận vuông A khả nghịch, nếu và chỉ nếu $\det A \neq 0$. Khi đó : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A^t$, với $P_A = [A_{ij}]$ (gọi là ma trận phụ hợp của A).

Ví dụ. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ khả nghịch vì $\det A = 1 \neq 0$.

Ví dụ. Các ma trận sau đây có khả nghịch không?

a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Ví dụ. Tìm a để ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

III. PHƯƠNG PHÁP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Sử dụng định lý 1

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông A , ta cần:

- Tính $\det A$
 - Nếu $\det A = 0$ thì kết luận ma trận A không khả nghịch.
 - Nếu $\det A \neq 0$ thì kết luận A khả nghịch và chuyển sang bước 2.
- Tính phần bù đại số của tất cả các phần tử $a_{ij} \in A$.
- Lập ma trận phụ hợp từ các phần bù đại số thu được $P_A = [A_{ij}]$.
- Lập ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A^t$.

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Ta có

$$\det A = 1; A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -2, A_{22} = 1$$

$$\Rightarrow P_A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ta có

$$\det A = -6; A_{11} = 11, A_{12} = -12, A_{13} = -7, A_{21} = -7,$$

$$A_{22} = 6, A_{23} = 5, A_{31} = -1, A_{32} = 0, A_{33} = -1;$$

$$\Rightarrow P_A = \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Ví dụ. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây bằng phương pháp định thức

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

§4. HẠNG CỦA MA TRẬN

I. KHÁI NIỆM

I.1. Định thức con: Cho ma trận bất kì $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $1 \leq k \leq \min(m, n)$. Định thức gồm các phần tử

thuộc giao của k dòng và k cột tùy ý của A được gọi là định thức con cấp k của A .

I.2. Hàng của ma trận: Ta nói hàng của ma trận A là p nếu trong A có một định thức con khác 0 cấp p và các định thức con cấp cao hơn p đều bằng 0.

Khi đó ta viết $\text{rank}(A) = p$ hoặc $r(A) = p$.

Như vậy, **hàng của ma trận là cấp cao nhất của định thức con khác 0 của nó.**

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

- ✓ **Hàng của một ma trận không thể vượt quá số dòng và số cột của ma trận.**
- ✓ **Khi A là ma trận vuông và $\det A \neq 0$ thì $r(A)$ bằng chính cấp của A .**

II. TÍNH CHẤT

1. Hàng của ma trận bậc thang bằng số dòng có phần tử khác 0 của nó.
2. Mọi phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hàng của ma trận.
3. $r(A) = r(A')$

Từ hai tính chất đầu, ta có phương pháp tìm hàng của ma trận:

Để tìm hàng của một ma trận, ta biến đổi nó thành ma trận bậc thang dòng và áp dụng các tính chất để kết luận.

Ví dụ. Tìm hàng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

Ta biến đổi ma trận đã cho thành ma trận bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A' là ma trận bậc thang.

Theo tính chất 2, ta có $\text{rank}(A) = \text{rank}(A')$;

Theo tính chất 1 ta lại có $\text{rank}(A') = 2$. Vậy $\text{rank}(A) = 2$.

Ví dụ. Tìm hàng của ma trận $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & m+3 \\ 2 & 1 & 5 & m \end{bmatrix}$ theo tham số m .

Ta biến đổi C thành ma trận bậc thang:

$$C \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & m-6 \\ 0 & -1 & -1 & m-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C'$$

Ta có $r(C) = r(C') = \begin{cases} 2 & \text{khi } m = 5 \\ 3 & \text{khi } m \neq 5 \end{cases}$

Ví dụ. Tìm hàng của các ma trận sau đây:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}; b) \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; c) \begin{bmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Tính

$$a) -5 \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}; \quad b) 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}^t - 3 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^t$$

1.2. Thực hiện phép toán sau đây đối với các ma trận

$$a) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^t + 2 \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad b) -3 \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

1.3. Tính : a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3$;

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^2$

1.4. Tính định thức cấp ba sau đây:

$$a) \begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}; \quad b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

1.5. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây (nếu có)

$$a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad b) B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

1.6. Tìm hạng của các ma trận sau đây:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & m \\ -2 & 8 & a \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. KHÁI NIỆM

1.1. Hệ phương trình tuyến tính: là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó a_{ij} , b_i là các số cho trước, x_j là các ẩn số ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)

Trong hệ (1) ta thấy có m phương trình và n ẩn số.

Đặt $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ gọi là ma trận các hệ số của ẩn,

$B = [b_i]_{m \times 1}$ gọi là ma trận các hệ số tự do,

$X = [x_i]_{n \times 1}$ gọi là ma trận các ẩn số.

Khi đó hệ phương trình (1) được viết ở dạng ma trận : $AX = B$ (2)

II. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Đặt $\bar{A} = [A|B]$, gọi là ma trận mở rộng của hệ phương trình (1), thu được bằng cách viết thêm ma trận B vào bên phải ma trận A .

Định lý 1: *Hệ phương trình (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu $r(A) = r(\bar{A})$.*

Ví dụ. Xét hệ phương trình.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

Ta có ma trận mở rộng:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 13 \end{array} \right] = [A'|B']$$

Suy ra

$$r(A) = r(A') = 2; r(\bar{A}) = r(A'|B') = 2.$$

Vậy $r(A) = r(\bar{A}) \Rightarrow$ Hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ. Hệ phương trình sau đây có nghiệm hay không?

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases} ; b) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải : Ta tìm hạng của các ma trận tương ứng.

a)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & 1 \end{array} \right] \\ \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right] = [A'|B']$$

$$\text{Ta có } r(A) = r(A') = 2; r(\bar{A}) = r(A'|B') = 3$$

Suy ra $r(A) \neq r(\bar{A})$.

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A'|B']$$

$$\text{Ta có } r(A) = r(A') = 3, r(\bar{A}) = r(A'|B') = 3. \text{ Suy ra } r(A) = r(\bar{A})$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ. Hệ phương trình sau đây có nghiệm hay không?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}$$

III. SỐ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Định lý 2: Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm, nghĩa là $r(A) = r(\bar{A}) = k$.

Khi đó có hai trường hợp sau đây có thể xảy ra.

a) $r(A) = r(\bar{A}) = k = n$ (số ẩn của hệ phương trình)

Trong trường hợp này hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

b) $r(A) = r(\bar{A}) = k < n$.

Trong trường hợp này hệ phương trình có vô số nghiệm.

IV. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (Phương pháp Gauss)

Bước 1 : Kiểm tra điều kiện có nghiệm

Lập ma trận bậc thang $\bar{A} = [A | B]$, đưa nó về dạng bậc thang dòng và kiểm tra điều kiện có nghiệm.

- nếu $r(A) \neq r(\bar{A})$: kết luận hệ vô nghiệm
- nếu $r(A) = r(\bar{A})$: kết luận hệ có nghiệm. Chuyển sang bước 2.

Bước 2 : Tìm nghiệm

- nếu $r(A) = r(\bar{A}) = n$ (số ẩn) : hệ phương trình có 1 nghiệm. Căn cứ vào ma trận bậc thang thu được ở bước 1, ta lập hệ phương trình mới và giải ngược từ dưới lên để tìm các ẩn số.
- nếu $r(A) = r(\bar{A}) = k < n$: hệ phương trình có vô số nghiệm.

Trong khối bên trái của ma trận bậc thang thu được ở bước 1 chọn ra một định thức con khác 0 cấp k . k ẩn số tương ứng với các cột của định thức này được gọi là các ẩn chính của hệ phương trình, còn lại $n - k$ ẩn được gọi là ẩn tự do. Từ ma trận bậc thang đó ta cũng lập hệ phương trình mới và chuyển ẩn tự do sang vế phải. Sau đó giải ngược từ dưới lên để tìm các ẩn chính.

Nghiệm tìm được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình. Cho ẩn tự do các giá trị tùy ý ta thu được tập hợp tất cả các nghiệm của hệ.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x - 2y + z + 2t = m \\ x + y - z + t = 2m + 1 \\ x + 7y - 5z - t = m \end{cases}$$

Xét ma trận mở rộng

$$\begin{aligned} [A|B] &= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2m+1 \\ 1 & 7 & -5 & -1 & m \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 9 & -6 & -3 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & m \\ 0 & 3 & -2 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3m-3 \end{array} \right] = [A'|B'] \end{aligned}$$

- Nếu $m \neq -1$ thì $r(A|B) = 3 \neq r(A) = 2$ nên hệ phương trình vô nghiệm.
- Nếu $m = -1$ thì $r(A|B) = r(A) = 2 < 4$ nên hệ phương trình có vô số nghiệm.

Trong ma trận A' ta chọn định thức con $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, thế thì hai ẩn số x_1, x_4 sẽ là các ẩn chính, còn lại

hai ẩn số x_2, x_3 là các ẩn tự do. Thay $m = -1$ vào ma trận bậc thang, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_4 = -1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_4 = -3x_2 + 2x_3 \\ x_2 \in R \\ x_3 \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 - 4x_2 + 3x_3 \\ x_4 = 3x_2 - 2x_3 \\ x_2 \in R \\ x_3 \in R \end{cases}$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = m \\ 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

I. KHÁI NIỆM. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất là hệ phương trình tuyến tính mà tất cả các hệ số tự do đều bằng 0:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: Ở đây ma trận hệ số tự do $B = 0$ nên ta luôn có $r(\bar{A}) = r(A|0) = r(A)$. Suy ra hệ phương trình luôn có nghiệm. Chẳng hạn, ta có thể thấy ngay một nghiệm của hệ phương trình là $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Nghiệm này gọi là nghiệm tầm thường của hệ phương trình.

II. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Để giải các hệ phương trình loại này ta cũng dùng phương pháp Gauss với những lưu ý sau :

- Chỉ cần lập A và tìm $r(A)$
- Nếu $r(A) = n$ (số ẩn) : hệ chỉ có 1 nghiệm, đó chính là nghiệm tầm thường $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
- Nếu $r(A) < n$: hệ phương trình có vô số nghiệm (có nghiệm không tầm thường).
- Khi hệ có vô số nghiệm thì phải chọn ẩn chính, ẩn tự do. Lập hệ phương trình mới để tìm nghiệm. Khi lập hệ phương trình mới thì các vế phải cũng là 0. Nghiệm tìm được gọi là nghiệm tổng quát.
- Tập hợp các nghiệm tìm được bằng cách cho các ẩn tự do những giá trị đặc biệt, lập nên một ma trận chéo khác ma trận-không (ma trận đơn vị là một trường hợp đặc biệt), gọi là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình (3).

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Ta chỉ cần xét ma trận A và biến đổi nó thành ma trận bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & -2 & 7 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $r(A) = 2 < 4$. Trong ma trận A' ta chọn định thức con $\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, thế thì hai ẩn số x_2, x_3 sẽ là các ẩn chính, còn lại hai ẩn số x_1, x_4 là các ẩn tự do. Từ ma trận bậc thang ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -x_2 + 5x_3 = -2x_1 - 7x_4 \\ x_3 = -3x_4 \\ x_1 \in R \\ x_4 \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 - 8x_4 \\ x_3 = -3x_4 \\ x_1 \in R \\ x_4 \in R \end{cases}$$

Đây là nghiệm tổng quát của hệ phương trình đã cho.

Cho $x_1 = 1; x_4 = 0$, ta tìm được một nghiệm cơ bản là $(1, 2, 0, 0)$.

Cho $x_1 = 0; x_4 = 1$, ta tìm được một nghiệm cơ bản là $(0, -8, -3, 1)$.

x_1	x_2	x_3	x_4
1	2	0	0
0	-8	-3	1

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây

$$\begin{cases} x_1 - 9x_2 - 3x_3 - 5x_4 - 14x_5 = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG II

2.1. Giải hệ phương trình sau

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ -2x_1 - 7x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 3y + 5z - 2t = 3 \\ 2x + 7y + 3z + t = 5 \\ x + 5y - 9z + 8t = 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t = 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x - 3y + 2z - t = 8 \\ 3x - 2y + z - 3t = 7 \\ 2x - y - 5z - 5t = 6 \\ 5x - 3y + z - 8t = 1 \end{cases}$$

2.2. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\text{a) } \begin{cases} x - 2y + z + 2t = m \\ x + y - z + t = 2m + 1 \\ x + 7y - 5z - t = m \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y - z + t = m \\ 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$$

2.3. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Cramer

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$$

2.4. Tìm nghiệm tổng quát và hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau đây:

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

CHƯƠNG III

KHÔNG GIAN VECTOR

§1. KHÔNG GIAN VECTOR R^n

I. KHÔNG GIAN R^2

Cho tập hợp $R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in R, x_2 \in R\}$.

Ta đưa ra hai phép toán:

- Phép cộng hai phần tử của R^2 :

Giả sử $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ là hai phần tử bất kì của R^2 . Thế thì

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

- Phép nhân một số với một phần tử của R^2 :

Giả sử α là một số và x . Thế thì $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2)$

Ví dụ 1. Cho $x = (1, 2)$, $y = (-2, 5)$, $\alpha = 3$, $\beta = -2$. Ta có

$$x + y = (-1, 7), \alpha x = (3, 6), \beta y = (4, -10), \alpha x + \beta y = (7, -4).$$

Tập hợp R^2 cùng với hai phép toán đó có 8 tính chất sau đây:

1. $(x + y) + z = x + (y + z), \forall x, y, z \in R^2$
2. $\exists O = (0, 0) \in R^2$ sao cho $x + O = O + x = x, \forall x \in R^2$
3. $\forall x \in R^2, \exists (-x) \in R^2$ sao cho $x + (-x) = (-x) + x = O$
4. $x + y = y + x, \forall x, y \in R^2$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall x, y \in R^2, \forall \alpha \in R$
6. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall x \in R^2, \forall \alpha, \beta \in R$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \forall x \in R^2, \forall \alpha, \beta \in R$
8. $1x = x, \forall x \in R^2$

Tập hợp R^2 cùng với hai phép toán trên gọi là không gian vector, các phần tử thuộc không gian này đều được gọi là vector, phần tử $O = (0, 0)$ được gọi là vector - không (hay phần tử trung hòa của không gian vector).

II. KHÔNG GIAN R^3

Cho tập hợp $R^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in R\}$.

Tương tự, ta cũng xét hai phép toán với các tính chất như đối với không gian vector R^2 . Khi đó ta cũng có không gian vector R^3 với phần tử trung hòa là $O = (0, 0, 0)$

Ví dụ 2. Cho $x = (2, 1, 2)$, $y = (3, -3, 4) \in R^3$, $\alpha = -3$, $\beta = 2$.

Hãy tính: αx , βy , $\alpha x + \beta y$, $4x - 5y$.

$$4x - 5y = 4(2, 1, 2) - 5(3, -3, 4) = (8, 4, 8) - (15, -15, 20) = (-7, 19, -12)$$

III. KHÔNG GIAN R^n

Một cách tổng quát, ta có không gian vector

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in R\} \text{ với } n \text{ bất kì.}$$

Hai phép toán trong không gian này là :

- Phép cộng vector :

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

- Phép nhân vector với một số :

$$\alpha (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

§2. HỆ VECTƠ ĐỘC LẬP, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

I. TỔ HỢP TUYẾN TÍNH

Trong không gian R^n , cho hệ k vector $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ là k số thực tùy ý.

Lập vector $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$. Vector v được gọi là một tổ hợp tuyến tính của hệ vector đã cho.

Theo định nghĩa trên thì có vô số tổ hợp tuyến tính của hệ M .

II. BIỂU THỊ TUYẾN TÍNH

Trong không gian R^n , cho hệ k vector $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ và vector v .

Nếu v là tổ hợp tuyến tính của M thì ta nói v biểu thị tuyến tính được qua M .

Biểu thị tuyến tính vector v qua hệ M nghĩa là viết v ở dạng một tổ hợp tuyến tính của hệ M . Nói cách khác, ta cần tìm k số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ thỏa mãn đẳng thức $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$

III. HỆ VECTƠ ĐỘC LẬP TUYẾN TÍNH, PHỤ THUỘC TUYẾN TÍNH

Trong không gian vector R^n cho hệ $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

Xét đẳng thức $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ (*). Đương nhiên là đẳng thức (*) xảy ra khi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

- Nếu đẳng thức chỉ xảy ra khi tất cả các số $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ thì ta nói hệ k vector đã cho là độc lập tuyến tính.
- Nếu tồn tại số k số $\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k$ không đồng thời bằng 0 sao cho đẳng thức (*) xảy ra thì ta nói hệ vector đó là phụ thuộc tuyến tính.

§3. HẠNG CỦA HỆ VECTƠ

Trong không gian vector R^n cho hệ vector $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$

1. Định nghĩa : Số tối đa các vector độc lập tuyến tính có thể rút ra từ M gọi là hạng của M và ký hiệu là $rank(M)$ hay $r(M)$.

Nhận xét : $r(M) \leq m$ (hạng của một hệ vector không thể vượt quá số vector của hệ đó)

2. Tính chất :

- (i) Hạng của hệ vector M bằng hạng của ma trận dòng các vector của M .
- (ii) Nếu hạng của hệ bằng số vector trong hệ thì hệ vector đã cho độc lập tuyến tính.
- (iii) Nếu hạng của hệ nhỏ hơn số vector thì hệ vector đó phụ thuộc tuyến tính.

3. Phương pháp tìm hạng và xét sự độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính của hệ vector

Sử dụng tính chất (i) ta có thể tìm được hạng của hệ vector.

Hơn thế nữa, sau khi biết hạng của hệ vector, căn cứ vào các tính chất (ii), (iii) ta sẽ xét được sự độc lập hay phụ thuộc của hệ đó.

Ví dụ. Tìm hạng của các hệ vector $\{x = (1, -3, 2), y = (2, -2, 1), z = (0, 4, -3)\}$, từ đó suy ra tính độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính của chúng.

- Lập ma trận tạo bởi ba vector $x = (1, -3, 2), y = (2, -2, 1), z = (0, 4, -3)$, ta có

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hạng của hệ vector bằng hạng của ma trận, tức là bằng 2. Vì $2 < 3$ (số vector) nên hệ vector đã cho phụ thuộc tuyến tính.

- Lập ma trận tạo bởi hai vector $x = (2, 1), y = (4, 3)$. Ta có

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vì $r(B) = 2$ (số vector) nên hai vector đã cho độc lập tuyến tính.

Ví dụ 4. Hãy xét sự độc lập tuyến tính của các hệ vector sau đây:

a) $x = (1, 3, 5), y = (2, -1, 4), z = (-1, 0, 2) \in R^3$

b) $x = (1, 2), y = (3, 5), z = (-3, 4) \in R^2$

Ví dụ 5. Tìm m để hệ vector sau độc lập tuyến tính:

$$x = (1, -1, 3, 2), y = (2, 3, -2, 4), z = (1, 4, -5, m) \in R^4.$$

Chú ý.

- Khi A (ma trận dòng các vector của hệ M) là ma trận vuông, ta có thể căn cứ vào $\det A$ để kết luận : nếu $\det A \neq 0$ thì M độc lập tuyến tính; nếu $\det A = 0$ thì M phụ thuộc tuyến tính.
- Mọi hệ có chứa vector-không đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.
- Trong không gian R^n , mọi hệ nhiều hơn n vector đều là hệ phụ thuộc tuyến tính.

§5. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU, TỌA ĐỘ VECTOR

I. CƠ SỞ, SỐ CHIỀU CỦA KHÔNG GIAN VECTOR

- Trong không gian vector R^n , hệ gồm n vector độc lập tuyến tính được gọi là cơ sở của không gian đó.

Ví dụ. a) Trong không gian R^2 , xét hai hệ vector

$$A = (a_1 = (1, 1), a_2 = (1, 2))$$

$$B = (b_1 = (1, -1), b_2 = (-1, 2))$$

Mỗi hệ đều có 2 vector và độc lập tuyến tính nên đều là cơ sở của không gian đó.

b) Trong không gian R^3 , xét hai hệ vector

$$A = (a_1 = (1, 1, 1), a_2 = (1, 2, 3), a_3 = (0, 1, 3))$$

$$B = (b_1 = (1, -1, 1), b_2 = (-1, 1, 1), b_3 = (1, 1, -1))$$

Mỗi hệ đều có 3 vector và độc lập tuyến tính nên đều là cơ sở của không gian đó.

- Một không gian vector có thể có nhiều cơ sở, tuy nhiên số lượng vector trong mỗi cơ sở đều bằng nhau.
- Số lượng vector trong cơ sở, tức là n , được gọi là số chiều của không gian, kí hiệu $\dim R^n = n$.
- Đặc biệt, các cơ sở sau đây được gọi là cơ sở chính tắc của không gian tương ứng và các vector thuộc cơ sở đó được gọi là vector đơn vị :

$$E^2 = \{e_1 = (1, 0); e_2 = (0, 1)\} \text{ là cơ sở chính tắc của } R^2.$$

$$E^3 = \{e_1 = (1, 0, 0); e_2 = (0, 1, 0); e_3 = (0, 0, 1)\} \text{ là cơ sở chính tắc của } R^3.$$

$$E^n = \{e_1 = (1, 0, \dots, 0); e_2 = (0, 1, \dots, 0), e_n = (0, 0, \dots, 1)\} \text{ là cơ sở chính tắc của } R^n.$$

Chú ý. Trong không gian R^n muốn biết hệ M có phải là cơ sở hay không ta cần kiểm tra 2 điều kiện :

- M có gồm đúng n vector không ? Nếu không thì M không phải là cơ sở. Nếu có thì xét điều kiện thứ hai.
- M có độc lập tuyến tính không ? (ở đây ta có thể đưa về việc tìm hạng của A (ma trận dòng các vector của M) hoặc tính $\det A$.

Ví dụ. Trong các hệ vector sau, hệ nào là cơ sở của R^3 ?

$$A = \{a_1 = (1, 3, 0); a_2 = (2, -3, 7)\}$$

$$B = \{b_1 = (1, 1, 1); b_2 = (2, 2, 2); b_3 = (2, 4, 3)\}$$

$$C = \{c_1 = (1, -3, 6); c_2 = (2, 4, 3); c_3 = (3, 1, 8)\}$$

$$D = \{d_1 = (1, 1, 1); d_2 = (2, -5, 7); d_3 = (0, 0, 0)\}$$

Ví dụ. Tìm m để hệ vector sau là cơ sở của không gian R^3

$$M = \{v_1 = (1, 3, 6); v_2 = (2, -4, 3), v_3 = (3, -1, m)\}$$

II. TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

Khi có một cơ sở $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ nào đó trong không gian vector R^n thì mọi vector x thuộc không gian đều biểu thị qua cơ sở đó ở dạng:

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

Ta gọi bộ số $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là tọa độ của vector x đối với cơ sở đã cho và viết $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)_A$

Ứng với các cơ sở khác nhau, tọa độ của cùng một vector sẽ khác nhau.

Ví dụ. Tìm tọa độ của vector $x = (4, 7) \in R^2$ đối với hai cơ sở cho trong ví dụ 1a), 1b).

Giải. a) Ta cần tìm hai số α_1, α_2 sao cho

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \Leftrightarrow (4, 7) = \alpha_1 (1, 1) + \alpha_2 (1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 4 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy, tọa độ của vector x đối với cơ sở A là $[x]_A = (1, 3)_A$.

b) Ta cần tìm hai số β_1, β_2 sao cho

$$x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow (4, 7) = \beta_1 (1, -1) + \beta_2 (-1, 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 4 \\ -\beta_1 + \beta_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 15 \\ \beta_2 = 11 \end{cases}$$

$$x = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \Leftrightarrow (4, 7) = \beta_1 (1, -1) + \beta_2 (-1, 2)$$

Vậy, tọa độ của vector x đối với cơ sở B là $[x]_B = (15, 11)_B$.

Ví dụ. Trong không gian R^3 , chứng minh hệ vector sau đây là cơ sở:

$$C = (c_1 = (1, 1, 1), c_2 = (1, 1, 0), c_3 = (1, 0, 0))$$

Tìm tọa độ của vector $y = (2, 3, 1) \in R^3$ đối với cơ sở đó.

Giải. a) **Chứng minh cơ sở:** Ta cần chứng minh ba vector đã cho độc lập tuyến tính. Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Ta có $r(A) = 3$ là số vector nên ba vector đã cho độc lập tuyến tính. Vậy hệ vector đó là cơ sở của không gian R^3 .

Ta cũng có thể tính $\det A$: $\det A = -1 \neq 0$ nên A độc lập tuyến tính và do đó là cơ sở của R^3 .

b) Tìm tọa độ vector: Ta cần tìm ba số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sao cho

$$y = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 \Leftrightarrow (2, 3, 1) = \alpha_1 (1, 1, 1) + \alpha_2 (1, 1, 0) + \alpha_3 (1, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ \alpha_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}$$

Vậy, tọa độ của vector y đối với cơ sở C là $[y]_C = (1, 2, -1)_C$.

Ví dụ. Trong không gian R^2 , chứng minh hệ vector $A = (a_1 = (1, 4), a_2 = (4, 1))$ là cơ sở.

Tìm tọa độ của vector $x = (-2, 7) \in R^2$ đối với cơ sở đó.

Ví dụ. Trong không gian R^3 , chứng minh hệ vector sau đây là cơ sở:

$$B = (b_1 = (1, 0, 1), b_2 = (1, 1, 0), b_3 = (0, 1, 1))$$

Tìm tọa độ của vector $y = (3, 5, 4) \in R^3$ đối với cơ sở đó.

§4. KHÔNG GIAN VECTOR CON

I. KHÔNG GIAN VECTOR CON

Định nghĩa : Cho V là một tập con khác rỗng của không gian R^n . Nếu V cũng là một không gian vector thì nó được gọi là không gian con của R^n .

Điều kiện cần và đủ để tập con là không gian con.

Tập con **V khác rỗng** của R^n là không gian con khi và chỉ khi nó khép kín với hai phép toán cộng vector và nhân vector với một số, tức là V thỏa mãn hai điều kiện sau:

- (i) với mọi $x, y \in V$ thì $x + y \in V$
- (ii) với mọi $x \in V$ và $\alpha \in R$ thì $\alpha x \in V$

Ví dụ. Cho không gian vector R^3 và tập con $V = \{x = (x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in R\}$

Hiển nhiên $V \neq \emptyset$ vì trong V có ít nhất một phần tử là $O = (0, 0, 0)$.

Với mọi $x = (x_1, x_2, 0), y = (y_1, y_2, 0) \in V$, ta có

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 0) \in V;$$

Mặt khác, với mọi $x = (x_1, x_2, 0) \in V, \alpha \in R$, ta có

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, 0) \in V.$$

Do đó V thỏa mãn các điều kiện của không gian con.

Vậy V là không gian con của R^3 .

Ví dụ. Cho không gian vector R^2 và tập con

$$V = \{x = (a, -a), a \in R\}$$

V có phải là không gian vector con của R^2 ?

Ví dụ. Cho không gian vector R^3 và tập con

$$V = \{x = (x_1, x_2, 1) : x_1, x_2 \in R\}$$

Hiển nhiên $V \neq \emptyset$ vì trong V có ít nhất một phần tử là $a = (0, 0, 1)$

Với mọi $x = (x_1, x_2, 1), y = (y_1, y_2, 1) \in V$, ta có

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, 2) \notin V;$$

Do đó V không thỏa mãn các điều kiện của không gian con.

Vậy V không là không gian con của R^3 .

II. KHÔNG GIAN CON SINH BỞI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH THUẦN NHẤT

Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất với n ẩn số ở dạng ma trận $AX = 0$

Tập hợp nghiệm của hệ phương trình này luôn khác $\emptyset$.

Mỗi nghiệm của hệ phương trình là một bộ n số thực, tức là một vector của R^n .

Người ta chứng minh được rằng tập hợp tất cả các nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính thuần nhất n ẩn là không gian con của R^n . Ta gọi đó là không gian con sinh bởi hệ phương trình đã cho. Không gian này có số chiều bằng số ẩn tự do của hệ phương trình, còn hệ nghiệm cơ bản là cơ sở của không gian con.

Ví dụ. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của R^4 sinh bởi hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Giải : Ta cần tìm hệ nghiệm cơ bản và số ẩn tự do của hệ phương trình đã cho. Muốn vậy, ta lập ma trận các hệ số của ẩn và biến đổi sơ cấp để tìm hạng của ma trận này.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ta có $r(A) = 2$ nên hệ phương trình có hai ẩn chính tương ứng với định thức con khác không là x_1, x_2 , còn lại x_3, x_4 là các ẩn tự do. Từ ma trận bậc thang ta lập hệ phương trình mới tương đương:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4 \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \in R \\ x_4 \in R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -8a - 7b \\ x_2 = -6a + 5b \\ x_3 = a \in R \\ x_4 = b \in R \end{cases}$$

Từ đó ta tìm được hai nghiệm cơ bản là: $(-8, -6, 1, 0); (-7, 5, 0, 1)$.

Vậy, không gian con đã cho có số chiều bằng 2 và một cơ sở gồm hai vector: $u_1 = (-8, -6, 1, 0); u_2 = (-7, 5, 0, 1)$. Tập hợp nghiệm là $N = \{au_1 + bu_2 \mid a, b \in R\}$.

Ví dụ. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của R^4 sinh bởi hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG III

3.1. Thực hiện các phép toán sau đây

- $2(3, -2, 4, 1) + 4(-3, 4, 2, 5) - 3(1, 0, 4, 2);$
- $(2, -4, 5) + 5(4, 6, 3) - 7(0, 2, 5)$

3.2. Hãy tìm hạng của hệ vector sau đây và xét sự độc lập tuyến tính chúng

- $x = (1, -3, 7), y = (-2, 6, -1), z = (3, 4, m) \in R^3$
- $u = (1, 2, 3, -2), v = (-3, 1, 3, 5), w = (2, 0, 4, -5) \in R^4$

3.3. Trong không gian R^3 , cho bốn vector: $b_1 = (1, 0, -2), b_2 = (3, 2, 1), b_3 = (1, 2, 3), x = (8, 6, 3)$

- Chứng minh ba vector (b_1, b_2, b_3) là một cơ sở.
- Tìm tọa độ của vector x đối với cơ sở đó.

3.4. Tìm m để hệ vector sau là một cơ sở của R^4 :

$$a_1 = (1, 3, 4, 2), a_2 = (3, 4, 2, 1), a_3 = (4, 2, 1, 3), a_4 = (2, 1, 3, m)$$

3.5. Hãy tìm một cơ sở và số chiều của không gian con của R^4 sinh bởi hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$