

ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP
TOÁN A3 và TOÁN CAO CẤP 2

BỒ TÚC KIẾN THỨC (NHẮC LẠI)

I. PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

1. ĐẠO HÀM CẤP 1

a) Bảng đạo hàm cơ bản

$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	

b) Các quy tắc tính đạo hàm

$(u+v)' = u' + v'$	$(u-v)' = u' - v'$	$(c \cdot u)' = c \cdot u'$
$(uv)' = u'v + uv'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	

c) Đạo hàm của hàm hợp

Nếu $y = y(u)$, $u = u(x)$ thì $y = y[u(x)]$ là hàm hợp của x . Khi đó $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Bảng đạo hàm của hàm hợp

$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} u'$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$(\sin u)' = u' \cos u$
$(\cos u)' = -u' \sin u$	$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	$(\operatorname{cotg} u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$	b) $y = \ln(\sin - 2\cos x)$
c) $y = (e^{2\cos x} - x^3)$	d) $y = \sin(3\ln x - 2^x)$
e) $y = \tan(x^4 - 3x)$	f) $y = \arctan(e^{2x} + 1)$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a) $y = (\sin x)^x$	b) $y = (\cos x)^{\sin x}$	c) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$
---------------------	----------------------------	------------------------------

2. ĐẠO HÀM CẤP CAO

Đạo hàm cấp hai: $y'' = (y')'$

Đạo hàm cấp n bất kì: đạo hàm của đạo hàm cấp 2 gọi là đạo hàm cấp 3.

Tổng quát : đạo hàm của đạo hàm cấp $n - 1$ gọi là đạo hàm cấp n , ký hiệu $y^{(n)}$. Như vậy :

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

Quy ước : $y^{(0)} = y$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau đây

- a) $y = \cos^2 x$ b) $y = \ln(x + \sqrt{a + x^2})$ c) $y = (x^2 + x - 3)e^x$
 d) $y = \ln(\cos x + 2\sin x)$ e) $y = \arctan e^x$ f) $y = xe^{3x} + x^3$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau đây

- a) $y = e^{ax}$ b) $y = \sin x$ c) $y = \cos x$

3. VI PHÂN

a) Vi phân cấp 1

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'(x)$ thì ta nói $f(x)$ khả vi tại x . Biểu thức $y'(x)dx$ được gọi là vi phân (cấp 1) của hàm số đó và ký hiệu là dy hay df . Như vậy :

$$dy = y' dx \quad \text{hay} \quad df = f'(x)dx$$

b) Vi phân cấp cao

Vi phân của vi phân cấp một được gọi là vi phân cấp hai, kí hiệu d^2y , và được tính bởi công thức

$$d^2y = d(dy) = y''dx^2$$

Tổng quát : vi phân của vi phân cấp $n - 1$ được gọi là vi phân cấp n , ký hiệu $d^n(y)$. Công thức tính vi phân cấp n :

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

Ví dụ 10. Tính vi phân của các hàm số sau đây

- a) $y = \ln(x^2 + x + 1)$ b) $y = \sqrt{e^x + x^3}$ c) $y = \sin(\ln x + 2^x)$

Giải : a) $y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \Rightarrow dy = \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$

Ví dụ 11. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau đây

- a) $y = \ln(\sin x - \cos x)$ b) $y = e^{\cos x}$ c) $y = \arctan(e^x)$

II. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN CỦA HÀM MỘT BIẾN

II.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

1. BẢNG CÁC TÍCH PHÂN CƠ BẢN

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\Rightarrow \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C, a \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$$

$$\Rightarrow \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C, a \neq 0$$

$$\Rightarrow \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C, a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, a \neq 0$$

2. CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN :

$$- \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$- \int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

a) Phân tích thành tổng các tích phân cơ bản

Ví dụ 1. Tính các tích phân sau đây

a) $\int (x^3 - x^2 + \sqrt{x})dx$

b) $\int (2^x + 4e^x - \frac{3}{x})dx$

c) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

d) $\int (2\cos 2x - 8\sin 4x)dx$

Ví dụ 2. Tính các tích phân sau đây

a) $\int \tan x dx$

b) $\int \frac{2x-1}{x^2+1} dx$

c) $\int \frac{4x+1}{x^2+4} dx$

d) $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}$

b) Phương pháp tích phân từng phần

Công thức : $\int u dv = uv - \int v du$

Lưu ý chọn sao cho dễ tìm du , v và tích phân mới phải đơn giản hơn tích phân ban đầu.

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp tích phân từng phần

a) $\int x^2 \ln x dx$

b) $\int (x+1)\cos x dx$

c) $\int xe^{2x} dx$

d) $\int (2x-1)\sin 2x dx$

c) Phương pháp đổi biến số

- **Các bước thực hiện:**

- *chọn biến số mới, tính vi phân của nó.*

- *viết tích phân ban đầu theo biến số mới và tính tích phân thu được theo biến số mới.*

- *trả kết quả về biến số ban đầu.*

- **Ta thường gặp hai loại đổi biến số sau :**

- tích phân cần tính gần giống với tích phân cơ bản, chỉ khác là vị trí của x được thay bằng $ax + b$.

Chẳng hạn : $\int (3x-7)^5 dx$; $\int \ln(x+1) dx$

Trong trường hợp này ta đặt $t = ax + b$

- Biểu thức dưới dấu tích phân có dạng $f(x).[g^k(x)]$ hoặc $f(x)/[g^k(x)]$ trong đó $g'(x) = \alpha.f(x)$.

trong trường hợp này ta đặt $t = g(x)$.

Ví dụ 4. Tính các tích phân sau đây bằng phương pháp đổi biến số

a) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$

b) $\int x\sqrt{2+x^2} dx$

c) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

d) $\int x(1-x)^{2008} dx$

II.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

1. CÔNG THỨC CƠ BẢN

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$

2. TÍNH CHẤT

Tích phân xác định cũng có những tính chất tương tự như tích phân bất định. Chẳng hạn, quan hệ giữa đạo hàm và tích phân ở đây được phát biểu như sau :

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x); \int_a^x f'(t)dt = f(x) + c$$

3. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Tích phân xác định cũng được tính như tích phân bất định, với lưu ý là :

- **Công thức tích phân từng phần :**

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

- **Khi đổi biến số thì phải đổi cận theo biến số mới.**

Các bước thực hiện:

- chọn biến số mới, tính vi phân của nó
- đổi cận tích phân theo biến số mới
- viết tích phân ban đầu theo biến số mới và tính tích phân mới.

Ví dụ 1. Tính các tích phân xác định sau đây

a) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$

b) $\int_1^e x^2 \ln x dx$

c) $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

d) $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x-2}}$

e) $\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$

f) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x) dx}{x}$

Chương 1

PHÉP TÍNH VI PHÂN CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ

1. HÀM NHIỀU BIẾN.

Hàm nhiều biến

Cho tập hợp $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Quy tắc f đặt tương ứng mỗi điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$ với một số thực duy nhất, ký hiệu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, được gọi là hàm n biến xác định trên tập hợp D .

$x_1, x_2, \dots, x_n$ gọi là các biến số độc lập, $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là giá trị của hàm n biến ứng với điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$.

Thông thường khi cho hàm số, người ta phải cho trước tập xác định D và cho quy tắc f để có thể tính được giá trị tương ứng của hàm số tại mỗi điểm thuộc D .

Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, người ta chỉ cho quy tắc f mà không cho tập xác định. Khi đó, ta quy ước tập xác định D của hàm số là tập hợp các điểm $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sao cho giá trị của biểu thức $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ là số thực xác định.

Ví dụ 1. Cho $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$. Rõ ràng là ứng với mỗi cặp $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ta lại xác định được một giá trị duy nhất của z (chẳng hạn, giá trị của z tại $(2, -1)$ là $z = f(2, -1) = 2^3 - (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = 5$. Vậy đây là một hàm hai biến. Tập xác định của hàm số là cả không gian $\mathbb{R}^2$.

2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

1. Đạo hàm riêng (cấp 1)

Các định nghĩa trong mục này chỉ phát biểu cho hàm 2 biến. Đối với hàm nhiều biến hơn, ta có định nghĩa tương tự.

Cho hàm hai biến $f(x, y)$ xác định trên tập hợp D .

Nếu xem biến số y như hằng số, ta có hàm một biến theo x . Lấy đạo hàm của hàm số thu được theo x , ta gọi đó

là đạo hàm riêng theo x của hàm hai biến đã cho, kí hiệu là Z'_x hoặc $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Tương tự, nếu xem x là hằng số, ta có hàm một biến theo y và ta cũng tính được đạo hàm riêng theo y của hàm hai biến, kí hiệu là Z'_y hoặc $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Ví dụ. Cho hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$.

Xem y là hằng số, lấy đạo hàm của hàm số này theo x , ta có $Z'_x = 3x^2 + y$.

Tương tự, cố định x (xem như hằng số) và tính đạo hàm theo y , ta có đạo hàm riêng theo y là $Z'_y = -2y + x$.

Vậy, thực chất đạo hàm riêng theo từng biến số là đạo hàm của hàm một biến khi xem các biến số còn lại như hằng số.

Ví dụ. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau đây

a) $z = \frac{x}{y}$

b) $z = \ln(x^2 + y^3)$

c) $z = e^{xy}$

d) $z = \sin(xy - y^2)$

2. Vi phân cấp 1

• **Khái niệm :** Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên tập hợp D và có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y . Khi đó, biểu thức $dz = z'_x dx + z'_y dy$ được gọi là vi phân (toàn phần) của hàm hai biến đã cho.

Đối với các hàm số nhiều biến hơn ta có định nghĩa tương tự. Chẳng hạn, hàm 3 biến $w = f(x, y, z)$ có vi phân toàn phần là $dw = w'_x dx + w'_y dy + w'_z dz$

Ví dụ. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có vi phân là

$$dz = (3x^2 + y)dx + (x - 2y)dy.$$

Ví dụ. Tính đạo hàm riêng và vi phân của hàm số

a) $z = x^3 y^2 - xy^4$

b) $z = \ln(xy + y^2 - x)$

c) $z = \cos(xy + 1)$

d) $z = \arctg(xy)$

3. Đạo hàm riêng cấp cao

• Đạo hàm riêng cấp hai

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y . Ta gọi đây là các đạo hàm riêng cấp một. Rõ ràng chúng đều là hàm hai biến nên lại có đạo hàm riêng của mình. Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm số ban đầu.

Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai sau đây:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2}, \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy}, \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx}, \left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2}$$

với các tên gọi lần lượt là : đạo hàm riêng cấp hai theo x hai lần; đạo hàm riêng cấp hai theo x rồi theo y ; đạo hàm riêng cấp hai theo y rồi theo x ; đạo hàm riêng cấp hai theo y hai lần.

Các đạo hàm riêng cấp hai còn được kí hiệu lần lượt là

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Ví dụ. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có các đạo hàm riêng cấp một là

$$z'_x = 3x^2 + y, \quad z'_y = -2y + x. \text{ Ta tính tiếp 4 đạo hàm riêng cấp hai:}$$

$$z''_{x^2} = 6x, \quad z''_{xy} = 1; \quad z''_{yx} = 1, \quad z''_{y^2} = -2.$$

Ta nhận thấy các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp bằng nhau, nghĩa là $z''_{xy} = z''_{yx}$

Điều này đúng cho mọi hàm số có các đạo hàm riêng liên tục. Cụ thể, ta có định lý :

• **Định lý Schwarz :** Nếu trong một lân cận nào đó của điểm (x, y) hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm hỗn hợp và các đạo hàm này liên tục tại (x, y) thì $z''_{xy}(x, y) = z''_{yx}(x, y)$

Do đó, ở các ví dụ sau, đối với hàm hai biến ta chỉ cần tính 3 đạo hàm riêng cấp hai: $z''_{x^2}, z''_{xy}, z''_{y^2}$.

Định lý Schwarz cũng được mở rộng cho hàm nhiều hơn 2 biến và cho đạo hàm cấp cao hơn, chẳng hạn :

$$z'''_{xyz} = z'''_{yxz} = z'''_{zxy} = \dots$$

Ví dụ. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số

a) $z = e^{xy}$

b) $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

c) $z = \arctg(xy)$

d) $z = x^3 + y^3 - xy$

• Đạo hàm riêng cấp cao :

Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp $n - 1$ gọi là đạo hàm riêng cấp n của hàm số đã cho.

4. Vi phân cấp cao

• **Vi phân cấp hai** : Vi phân của vi phân cấp 1 của hàm hai biến $z = f(x, y)$ được gọi là vi phân cấp 2 của hàm đó, ký hiệu d^2z .

Dễ dàng tính được vi phân cấp hai của hàm hai biến là biểu thức:

$$d^2z = d(dz) = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$$

Ví dụ. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có các đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{xx} = 6x, \quad z''_{xy} = 1; \quad z''_{yx} = 1, \quad z''_{yy} = -2.$$

Vậy, vi phân cấp hai của hàm số đó là : $d^2z = 6xdx^2 + 2dxdy - 2dy^2$.

Ví dụ 13'. Tính vi phân cấp hai của hàm số $z = \arctg \frac{x}{y}$

Ví dụ 14. Tính vi phân cấp hai của hàm số

a) $z = e^{xy}$

b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

c) $z = xy^2 + x^3y^3$

d) $z = \sin(x^2 - y^2)$

• **Vi phân cấp cao** :

Vi phân của vi phân cấp $(n-1)$ gọi là vi phân cấp n .

3. CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

1. Khái niệm

Cho hàm số $f(x, y)$ xác định trên tập hợp D . $M_0(x_0, y_0) \in D$. Ta nói M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x, y)$ nếu tại các điểm $M(x, y)$ nằm xung quanh M_0 , $M \neq M_0$, ta có : $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, hay $f(M) < f(M_0)$ (nghĩa là $f(M) - f(M_0) < 0$))

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu khi thay bất đẳng thức $f(M) < f(M_0)$ bởi bất đẳng thức $f(M) > f(M_0)$.

Điểm cực đại, cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

Ví dụ 1. Xét hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 3$ và điểm $M_0(1, 0) \in D = R^2$.

Giả sử $M(x, y)$ là điểm bất kì thuộc tập xác định, nằm xung quanh điểm M_0 , $M \neq M_0$. Ta có

$$f(M) = f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 3; \quad f(M_0) = f(1, 0) = 2$$

Suy ra

$$f(M) - f(M_0) = x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 > 0, \text{ do } M \neq M_0$$

Vậy, $f(M) > f(M_0)$. Suy ra M_0 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

2. Điều kiện có cực trị

a) Điều kiện cần : Nếu $f(x, y)$ có cực trị tại $M_0(x_0, y_0) \in D$ và tại điểm đó tồn tại các đạo hàm riêng thì các đạo hàm riêng tại đó phải bằng 0:

$$f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$$

Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 được gọi là điểm dừng của hàm số.

Ví dụ 2. Hàm số cho ở ví dụ 1 có các đạo hàm riêng:

$$z'_x = 2x - 2, \quad z'_y = 2y \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{Vậy hàm số có một điểm dừng là } M_0(1, 0)$$

Lưu ý: Định lý chỉ nói đây là điều kiện cần, không phải là điều kiện đủ, nghĩa là nếu M_0 là điểm dừng thì đây là điểm nghi ngờ có cực trị, nhưng chưa thể kết luận ngay điều đó.

b) Điều kiện đủ để hàm đạt cực trị

Định lý : Cho hàm số $z = f(x, y)$. Giả sử $M_0(x_0, y_0) \in D$ là điểm dừng của hàm số $f(x, y)$ và tại M_0 hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai là

$A = f''_{xx}(M_0), B = f''_{xy}(M_0), C = f''_{yy}(M_0)$. Khi đó:

- Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, A > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại M_0 .

- Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0, A < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại M_0 .

- Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$ thì hàm số không có cực trị tại M_0 .

Lưu ý: Nếu $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ thì không sử dụng được định lý trên. Trong trường hợp đó ta có thể phải dùng định nghĩa cực trị của hàm số.

3. Các bước tìm cực trị của hàm hai biến

Từ hai định lý trên suy ra các bước cần thực hiện để tìm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là:

1. Tìm tập xác định.

2. Tính các đạo hàm riêng cấp 1 của hàm số đã cho. Giải hệ phương trình $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ để tìm điểm dừng.

3. Tính các đạo hàm riêng cấp hai $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$ Tại mỗi điểm dừng tính A, B, C và Δ (định thức cấp hai tạo bởi A, B, C) rồi xét dấu Δ .

4. Kết luận về cực trị của hàm số đã cho và tính giá trị cực trị (nếu có).

Ví dụ 3. Tìm cực trị (nếu có) của hàm số : $z = x^3 + 3y^2 - 3x - 6y$

Giải

- Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}^2$.

- Tìm điểm dừng :

$$z'_x = 3x^2 - 3; z'_y = 6y - 6 \Rightarrow \begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Hàm số có hai điểm dừng là $M_1(1, 1), M_2(-1, 1)$

- Các đạo hàm riêng cấp 2 : $z''_{xx} = 6x, z''_{xy} = 0, z''_{yy} = 6$

- Tại $M_1(1, 1)$:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 6, B = z''_{xy}(M_1) = 0, C = z''_{yy}(M_1) = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 36 > 0 \text{ và } A = 6 > 0 \text{ nên } M_1 \text{ là điểm cực tiểu. } z_{\min} = -5$$

Tại $M_2(-1, 1)$:

$$A = z''_{xx}(M_1) = -6, B = z''_{xy}(M_1) = 0, C = z''_{yy}(M_1) = 6$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -36 < 0 \text{ nên } M_2 \text{ không phải là điểm cực trị.}$$

Ví dụ 4. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

a) $z = 5xy - x^5 - y^5$

b) $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$

$$c) z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y ;$$

$$d) z = x^3 + y^3 + 6xy$$

4. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HÀM HAI BIẾN

1. Khái niệm

Ta đã xét bài toán tìm cực trị của hàm hai biến $z = f(x, y)$, trong đó các biến số x, y không bị ràng buộc bởi điều kiện gì. Ta gọi đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện.

Ở mục này ta xét bài toán tìm cực trị của hàm hai biến z khi x, y bị ràng buộc với nhau bởi một điều kiện nào đó.

Ta nói hàm số $z = f(x, y)$ đạt cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ nếu tồn tại một lân cận D của điểm M_0 sao cho $f(M) < f(M_0)$ với mọi điểm $M \in D, M \neq M_0$, thỏa mãn điều kiện $\varphi(M) = 0$.

Thông thường phương trình $\varphi(x, y) = 0$ cho ta một đường cong C nào đó. Như vậy ta chỉ so sánh $f(M)$ với $f(M_0)$ khi điểm M nằm trên C mà thôi.

Tương tự ta có khái niệm cực tiểu có điều kiện.

2. Điều kiện có cực trị : Ta thừa nhận các kết quả sau :

a) Điều kiện cần : Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, trong đó $f(x, y), \varphi(x, y)$ là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục.

Khi đó tồn tại số λ sao cho

$$\begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \varphi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ \varphi(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Số λ là một số chưa biết ta cần phải tìm gọi là nhân tử Lagrange.

Hàm số $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ được gọi là hàm số Lagrange ứng với $f(x, y)$ và điều kiện $\varphi(x, y) = 0$.

Điều kiện (1) cho thấy M_0 chính là điểm dừng của hàm số Lagrange và thỏa mãn thêm phương trình $\varphi(x, y) = 0$.

b) Điều kiện đủ : Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0)$ thỏa mãn (1).

Xét vi phân cấp hai của hàm số $L(x, y)$ tại điểm M_0 :

$d^2L(M_0) = L''_{xx}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{yy}(M_0)dy^2$, trong đó dx, dy không đồng thời bằng 0 và bị ràng buộc bởi điều kiện $d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy = 0$.

Người ta chứng minh được rằng:

- Nếu $d^2L(M_0) > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số đã cho.

- Nếu $d^2L(M_0) < 0$ thì M_0 là điểm cực đại có điều kiện của hàm số đã cho.

Như vậy, để tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, ta thực hiện như sau :

- Tìm tập xác định của hàm số $z = f(x, y)$

- Lập hàm số Lagrange $L(x, y) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$.

Tính các đạo hàm riêng L'_x, L'_y rồi giải hệ phương trình

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

để tìm các điểm dừng của hàm số Lagrange.

- Tính vi phân cấp 2 của $L(x, y)$.

- Tại mỗi điểm dừng (x_0, y_0) xét dấu vi phân cấp 2 của $L(x_0, y_0)$ rồi căn cứ vào đó để kết luận.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải. Ở đây : $f(x, y) = 6 - 4x - 3y$
và $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$

- Ta có hàm số Lagrange

$$L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad \text{Do đó } L'_x = -4 + 2\lambda x, L'_y = -3 + 2\lambda y$$

Giải hệ $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ ta tìm được hai điểm dừng

$$M_1\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right), \lambda_1 = \frac{5}{2}; \quad M_2\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right), \lambda_2 = -\frac{5}{2}$$

- Tính vi phân cấp hai của hàm Lagrange :

$$L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 0, L''_{yy} = 2\lambda$$

$$\Rightarrow d^2L(x, y) = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$$

- Tại M_1 ta có $\lambda = 5/2$ nên vi phân cấp hai là $d^2L(M_1) = 5(dx^2 + dy^2) > 0$

Vậy M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số đã cho với $z_{\min} = z(M_1) = 1$.

- Tại M_2 ta có $\lambda = -5/2$ nên vi phân cấp hai là

$$d^2L(M_2) = -5(dx^2 + dy^2) < 0$$

Vậy M_2 là điểm cực đại có điều kiện của hàm số đã cho với $z_{\max} = z(M_2) = 11$.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x + 2y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 5$

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x.y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 25$

Lưu ý. Nếu từ điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ có thể tính được y theo x (hoặc x theo y) thì thay vào hàm số $z = f(x, y)$ đã cho, ta sẽ được hàm theo x (hoặc theo y). Khi đó bài toán tìm cực trị có điều kiện của hàm hai biến được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm một biến theo x (hoặc theo y).

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2 - 2x + 2y - 5$ với điều kiện $x + y = 1$.

Giải : Từ điều kiện $x + y = 1$ ta có $y = 1 - x$. Thay vào z thì được :

$$z = x^2 + (1 - x)^2 - 2x + 2(1 - x) - 5 = 2x^2 - 6x - 2$$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3/2$ và $z_{\min} = -13/2$.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số :

a) $z = x.y^2$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 25$

b) $z = xy$ với điều kiện $2x + 3y - 5 = 0$.

Ví dụ. Tìm cực trị của hàm số $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$ với điều kiện $x + y + 3 = 0$.

4. CỰC TRỊ TUYỆT ĐỐI (GTLN, GTNN) CỦA HÀM HAI BIẾN

Ta xét bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (còn gọi là cực trị tuyệt đối) của hàm hai biến $f(x, y)$ liên tục trên miền đóng và bị chặn D .

Cũng như với hàm một biến, cực trị tuyệt đối có thể đạt được tại các điểm cực trị ở trong miền D hoặc trên biên của D . Do đó, muốn tìm cực trị tuyệt đối của hàm $f(x, y)$ trên miền D , ta cần

- tìm các điểm cực trị ở trong miền D
- tìm các điểm cực trị ở trên biên của D

Bài toán tìm điểm cực trị trên biên của D chính là bài toán tìm cực trị của hàm số đã cho với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$, trong đó $\varphi(x, y) = 0$ là phương trình của đường biên của D .

Trong thực hành, người ta chỉ cần làm như sau :

- Bước 1 : Tìm điểm dừng của $f(x, y)$ bên trong miền D (điểm ở trong D mà ta nghi ngờ có cực trị). Muốn thế ta

giải hệ phương trình $z'_x = 0, z'_y = 0$ với $(x, y) \in D$.

- Bước 2 : Tìm điểm nghi ngờ là điểm cực trị ở trên biên của D . Đó là những điểm nghi ngờ là điểm cực trị với

điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Muốn thế ta lập hàm số Lagrange và giải hệ phương trình
$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$
.

- Bước 3 : Tính giá trị của $z(x, y)$ tại các điểm thu được ở hai bước trên và so sánh để chọn ra GTLN, GTNN.

Lưu ý: nếu D là một đa giác lồi thì dễ dàng chứng minh được rằng điểm nghi ngờ có cực trị ở trên biên của D chỉ có thể là các đỉnh của đa giác. Do đó, trong trường hợp này, thay vì giải hệ phương trình ở bước 2 người ta chỉ cần tìm tọa độ các đỉnh của đa giác.

Ví dụ. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = xy$ trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4$.

D là hình tròn tâm ở $O(0, 0)$, bán kính bằng 2.

• Tìm điểm dừng ở trong miền D :

Giải hệ phương trình $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ ta được điểm dừng $O(0, 0)$. Điểm này ở trong miền D .

• Tìm điểm dừng trên biên miền D :

Biên của miền D có phương trình $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Xét hàm số Lagrange $L(x, y) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Ta có 4 điểm dừng : $(\sqrt{2}, \sqrt{2}); (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (\sqrt{2}, -\sqrt{2}); (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$;

• Tính giá trị của z tại 5 điểm tìm được ở trên:

$z(0, 0) = 0$;

$z(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2$; $z(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 2$; $z(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -2$; $z(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -2$

Suy ra GTLN của z là 2, đạt tại $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. GTNN của z là (-2), đạt tại $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ và $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Ví dụ. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 + y^2 - 4x - y$ trên

giới hạn bởi các đường $x=1, y=1, x+y=3$.

D là tam giác đóng ABC , xác định bởi điều kiện

$1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2$ và $x + y \leq 3$

• Trước hết ta tìm các điểm dừng ở trong miền D

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0,5 \end{cases}$

Điểm này không ở trong miền D .

• Biên của D là các cạnh của một tam giác nên điểm nghi ngờ có cực trị chỉ có thể là các đỉnh A, B, C .

• Tóm lại, chỉ có 3 điểm nghi ngờ có cực trị là A, B, C .

$z(A) = z(1, 1) = -3$

$z(B) = z(1, 2) = -1$

$z(C) = z(2, 1) = -4$

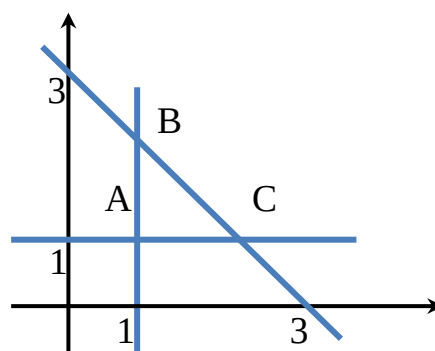
Vậy z có GTLN là $z(B) = -1$; GTNN là $z(C) = -4$

Ví dụ. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 + y^2 - xy - x - y$

trên miền D xác định bởi $x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3$

Ví dụ. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 - y^2$ trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 4$.

Ví dụ. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = xy^2$ trên miền D xác định bởi $x^2 + y^2 \leq 25$



BÀI TẬP

1. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau đây tại điểm đã chỉ ra

a) $z = x^2 - 3xy + y^2$, $(1, -1)$

b) $z = xye^x$, $(0, 2)$

c) $z = \frac{xy}{x-y}$, $(1, -1)$

d) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(0, 1)$

2. Tính các đạo hàm riêng và vi phân cấp hai của các hàm số sau đây

a) $z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$

b) $z = \frac{xy}{x-y}$

c) $u = xe^y + ye^z + ze^x$

d) $z = \ln(3x - 2y)$

3. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

a) $z = 4 - x^2 - y^2$

b) $z = e^{-x^2 - y^2}$

c) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

d) $z = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

4. Tìm cực trị với điều kiện của các hàm số sau đây

a) $f(x, y) = xy$, $x + y = 100$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $x + y = 10$

c) $f(x, y) = x + 3y$, $xy = 64$

d) $z = 6 - 4x - 3y$, $x^2 + y^2 = 1$

5. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $z = x^2 + 2y^2 - x$ trên miền $x^2 + y^2 \leq 1$

CHƯƠNG II. TÍCH PHÂN HÀM NHIỀU BIẾN

1. TÍCH PHÂN HAI LỚP

1. Khái niệm

Cho hàm hai biến $f(x, y)$ xác định trên tập hợp $D \subseteq R^2$. Ta xét tích phân của hàm số này lấy trên D và gọi đây là tích phân hai lớp, kí hiệu $\iint_D f(x, y) dx dy$. Ở đây, $f(x, y)$ là hàm số lấy tích phân, D là miền lấy tích phân,

dx, dy là vi phân của x, y (để chỉ rằng tích phân được lấy theo các biến số x, y).

2. Tính chất

Tích phân hai lớp có các tính chất tương tự như tích phân xác định:

1. $\iint_D cf(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy$, $c = \text{const}$

2. $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$

3. Tính chất bảo toàn quan hệ thứ tự :

Nếu $f(x, y) \leq g(x, y) \forall (x, y) \in D$ thì $\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$

4. Tính chất cộng tính :

Nếu miền lấy tích phân D được chia thành hai miền nhỏ D_1, D_2 không chồng lên nhau thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

5. $\iint_D dx dy = S(D)$, với $S(D)$ là diện tích của miền D .

3. Cách tính tích phân hai lớp

Công thức tính tích phân của hàm hai biến phụ thuộc vào hình dạng của miền D .

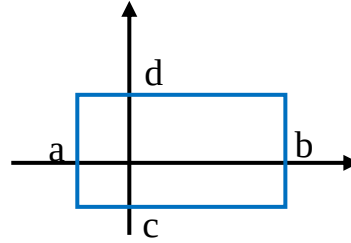
Sau đây ta xét một vài trường hợp đặc biệt đối với miền lấy tích phân.

a) Miền lấy tích phân là hình chữ nhật xác định bởi

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad (a, b, c, d = \text{const})$$

(Các cạnh của hình chữ nhật song song với hai trục tọa độ)

Khi đó ta có công thức tính tích phân hai lớp:



$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

Các tích phân ở vế phải được tính theo thứ tự từ phải sang trái, trừ khi các tích phân độc lập với nhau thì có thể tính chúng cùng lúc.

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, trong đó D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$

Cách 1 :

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_0^2 dx \int_{-1}^3 (x^2 - y) dy = \int_0^2 \left(x^2 y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=-1}^3 dx \\ &= \int_0^2 (4x^2 - 4) dx = \left(\frac{4}{3} x^3 - 4x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Cách 2 :

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \iint_D x^2 dx dy - \iint_D y dy = \int_0^2 x^2 dx \int_{-1}^3 dy - \int_0^2 dx \int_{-1}^3 y dy \\ &= \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 \right) (y \Big|_{-1}^3) - \left(x \Big|_0^2 \right) \left(\frac{y^2}{2} \Big|_{-1}^3 \right) = \frac{8}{3} \cdot 4 - 2 \cdot 4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

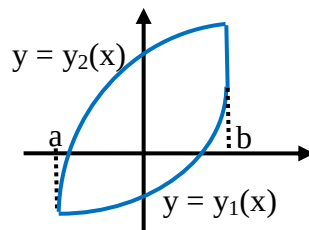
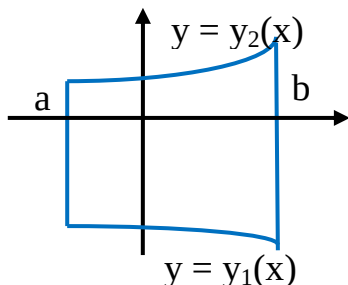
Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D x^2 y dx dy$, trong đó D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ -1 \leq y \leq 3 \end{cases}$

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D (2x + y) dx dy$, trong đó D là hình chữ nhật giới hạn bởi các đường thẳng:

$$x = 1, x = 3, y = 0, y = 4.$$

b) Miền lấy tích phân là hình thang cong xác định bởi:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases} \quad (a, b = \text{const})$$

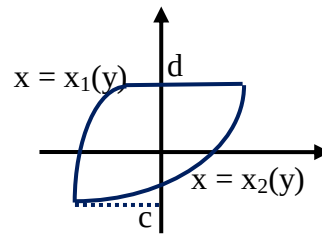
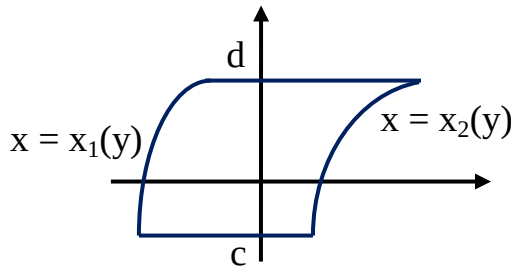


Ở đây biên của miền D có ít nhất một cạnh song song với Oy . Khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (2)$$

c) **Miền lấy tích phân là hình thang cong** xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases} \quad (c, d = \text{const})$$



Trong trường hợp này thì biên của miền D có ít nhất một cạnh song song với Ox . Khi đó

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (3)$$

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D xy dx dy$, trong đó D xác định bởi: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 \leq y \leq x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy dy = \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x y dy \\ &= \int_0^1 x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x^2}^x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^3 - x^5) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D (x + 6y) dx dy$ trong đó D giới hạn bởi các đường $y = x, y = 5x, x = 1$.

Giải: Trước hết phải vẽ hình, tìm tọa độ các giao điểm để xác định miền D .

Ví dụ. Tính $\iint_D (2x + y) dx dy$ trong đó D giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, x + y = 3$.

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, trong đó D giới hạn bởi các đường $y = x, y = x + 1, y = 1$,

$y = 3$.

ĐS : 14

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D y^2 dx dy$, trong đó D xác định bởi: $\begin{cases} y \leq x \leq 2y \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases}$

Ví dụ. Tính tích phân hai lớp $\iint_D (y - 1) dx dy$, trong đó D xác định bởi : $xy \geq 1; x \geq y; x \leq 3$.

Tóm lại : Nguyên tắc chung:

- Việc tính tích phân hai lớp được đưa về tính hai tích phân xác định lần lượt theo từng biến số.
- Khi tính tích phân theo biến số này thì xem biến số còn lại như hằng số.
- Thứ tự viết các tích phân xác định và cận của chúng phụ thuộc vào cách xác định miền lấy tích phân.
- Các tích phân được tính theo thứ tự từ phải sang trái. Khi các tích phân độc lập với nhau thì có thể tính chúng cùng lúc.