ĐỀ CƯƠNG ÔN THI MÔN TOÁN CAO CẤP

PHẦN I: GIẢI TÍCH HÀM MỘT BIẾN

CHƯƠNG 1: GIỚI HẠN VÀ LIÊN TỤC HÀM SỐ

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Vài giới hạn cơ bản

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} = 0 \ (\alpha > 0)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln^{p} x}{x^{\alpha}} = 0 \ (\alpha > 0, p \in N)$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1+\frac{1}{x})^{x} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} (1-\frac{1}{x})^{x} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{p}}{e^{x}} = 0 \ (p \in N)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^{x}-1}{x} = ln a$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$$

Các dạng vô định và phương pháp khử

Ta có 7 dạng vô định : $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0.\infty; 0^{0}; 1^{\infty}; \infty^{0}$

Các phương pháp khử dạng vô định:

- Nhân, chia cho biểu thức liên hợp.
- Chia tử, mẫu cho cùng một biểu thức khác không.
- Biến đổi làm xuất hiện các giới hạn đặc biệt.
- Áp dụng các tính chất của giới hạn của hàm số.
- Sử dụng các vô cùng bé tương đương.
- Sử dụng quy tắc L'Hospital.

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2-4x+10}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

HD

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{\cos x}-1)+(1-\sqrt[3]{\cos x})}{\sin^2 x}=\dfrac{1}{12}$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

c) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\sin 6x-\sin 8x}$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau đây

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x-3}$

Quy tắc l'Hospital

Định lý. Giả sử

(i) Các hàm số *f(x), g(x)* xác định trên khoảng $(x_0,b]$;

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ $\left(hay \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\right)$;

(iii) Trên $(x_0,b]$ tồn tại các đạo hàm hữu hạn *f'(x), g'(x)* và g'(x) $\neq 0$

(iv) Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$.

Khi đó : $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=k$.

Chú ý:

- Trong định lý trên x_0 có thể là số hữu hạn hoặc $-\infty$. Ngoài ra, định lí vẫn đúng cho trường hợp hai hàm số *f(x), g(x)* xác định trên khoảng $[a, x_0)$ và x_0 là số hữu hạn hoặc $+\infty$.

- Quy tắc L' Hospital chỉ áp dụng được cho hai dạng vô định $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Các dạng vô định khác phải biến đổi, đưa về hai dạng này, sau đó mới áp dụng quy tắc.

Cụ thể :

✓ Đối với dạng $\mathbf{0}.\infty$: Giả sử ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x).g(x)$ trong đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$. Khi đó ta viết $f(x).g(x)=\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ (đưa về dạng $\frac{0}{0}$) hoặc $f(x).g(x)=\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$ (đưa về dạng $\dfrac{\infty}{\infty}$)

✓ Đối với dạng $\infty-\infty$: Giả sử ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))$ trong đó $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Khi đó ta viết $f(x)-g(x)=\dfrac{1}{1/f(x)}-\dfrac{1}{1/g(x)}=\dfrac{1/f(x)-1/g(x)}{1/f(x).g(x)}$ và sẽ chuyển được về giới hạn dạng $\dfrac{0}{0}$

✓ Đối với dạng 0^0; ∞^0; 1^∞ : Giả sử ta cần tính $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ và giới hạn có một trong 3 dạng trên. Khi đó, đặt $y=[f(x)]^{g(x)}$. Ta có $\ln y = g(x).\ln f(x)$. Tìm $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y$. Nếu $\lim\limits_{x\to x_0}\ln y=a$ thì suy ra $\lim\limits_{x\to x_0} y=e^a$

Ví dụ 5. Sử dụng quy tắc L' Hospital để tìm giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\ln\sin x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{arctan\, x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\ln x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\ln\cos 3x}$

CHƯƠNG 2: ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

1. BẢNG ĐẠO HÀM CƠ BẢN

$(x^\alpha)'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(e^x)'=e^x$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(tg\, x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(cotg\, x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arctgx)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	

2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

$$(u+v)' = u' + v' \qquad (u-v)' = u' - v' \qquad (c\cdot u)' = c\cdot u'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Đạo hàm của hàm hợp

Nếu $y = y(u),\ u = u(x)$ thì $y = y[u(x)]$ là hàm hợp của x. Khi đó $y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Bảng đạo hàm của hàm hợp

$$(u^\alpha)' = \alpha\cdot u^{\alpha-1}u' \qquad (a^u)' = a^u \ln a\cdot u' \qquad (e^u)' = e^u\cdot u'$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a} \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u} \qquad (\sin u)' = u'\cos u$$

$$(\cos u)' = -u'\sin u \qquad (tg\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} \qquad (cotg\,u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad (arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2} \qquad (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$; **b)** $y = \ln(\sin x - 2\cos x)$

c) $y = e^{2\cos x - x^3}$; **d)** $y = \sin(3\ln x - 2^x)$

e) $y = tg(x^4 - 3x)$; **f)** $y = arctg(e^{2x} + 1)$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a) $y = (\sin x)^x$ **b)** $y = (\cos x)^{\sin x}$ **c)** $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

3. ĐẠO HÀM CẤP CAO

a) Đạo hàm cấp hai $y'' = (y')'$

b) Đạo hàm cấp n bất kì: $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'$

Quy ước : $y^{(0)} = y$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau đây

a) $y = \cos^2 x$ **b)** $y = \ln\left(x + \sqrt{a + x^2}\right)$ **c)** $y = (x^2 + x - 3)e^x$;

d) $y = \ln(\cos x + 2\sin x)$ **e)** $y = \arctan(e^x)$ **f)** $y = xe^{3x} + x^3$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm cấp *n* của các hàm số sau đây

a) $y = e^{ax}$ **b)** $y = \sin x$ **c)** $y = \cos x$

I.3. VI PHÂN

1. VI PHÂN CẤP 1

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'(x)$ thì biểu thức $y'(x)dx$ được gọi là vi phân của hàm số đó và ký hiệu là dy hay df. Như vậy :

$$dy = y'dx \quad hay \quad dy = f'(x)dx$$

2. VI PHÂN CẤP HAI

Vi phân của vi phân cấp một được gọi là vi phân cấp hai, kí hiệu d^2y, và được tính bởi công thức

$$d^2(y) = d(dy) = y''dx^2$$

Ví dụ 1. Tính vi phân của các hàm số sau đây

a) $y = \ln(x^2 + x + 1)$ b) $y = \sqrt{e^x + x^3}$ c) $y = \sin(\ln x + 2^x)$

Ví dụ 2. Tính vi phân cấp hai của các hàm số sau đây

a) $y = \ln(\sin x - \cos x)$ b) $y = e^{\cos x}$ c) $y = arc\tan(e^x)$

PHẦN II: ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

CHƯƠNG 1: MA TRẬN VÀ ĐỊNH THỨC. (10 TIẾT)

I.1. MA TRẬN

I. KHÁI NIỆM

I.1. Ma trận cấp m × n: m, n là hai số tự nhiên. Một ma trận cấp $m \times n$ là một bảng gồm $m \times n$ số, ký hiệu a_{ij}, được sắp xếp thành m dòng và n cột dưới dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{a_{ij}}$ là phần tử ở dòng i và cột j của ma trận A; i là chỉ số dòng, j là chỉ số cột của phần tử a_{ij} đó. Người ta thường viết tắt ma trận ở dạng $A = [a_{ij}]_{m\times n}$.

I.2. Ma trận bằng nhau : Hai ma trận được gọi là bằng nhau nếu :

- chúng có cùng cấp
- các phần tử tương ứng đều bằng nhau

I.3. Ma trận chuyển vị

Cho ma trận $A = [a_{ij}]_{m\times n}$. Ma trận thu được từ A bằng cách viết các dòng của A lần lượt thành các cột được gọi là ma trận chuyển vị của A và kí hiệu là A^t. Khi đó A^t là ma trận cấp $n \times m$.

Ví dụ Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Thế thì $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

Hiển nhiên ta có $(A^t)^t = A$.

II. CÁC LOẠI MA TRẬN

II.1. Ma trận vuông : là ma trận có số dòng *m* bằng số cột *n*, khi đó thay vì nói ma trận cấp $n \times n$ ta chỉ nói đó là ma trận vuông cấp *n*.

Ví dụ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai.

Trong ma trận vuông cấp *n*, người ta gọi các phần tử $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ là các phần tử thuộc đường chéo chính của ma trận.

II.2. Ma trận tam giác : là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm phía dưới, hoặc tất cả các phần tử nằm phía trên đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}$ là các ma trận tam giác.

II.3. Ma trận chéo: là ma trận vuông có tất cả các phần tử nằm ngoài đường chéo chính đều bằng 0.

Ví dụ 7. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ là ma trận chéo.

II.4. Ma trận đơn vị : là ma trận chéo có tất cả các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1. Ma trận đơn vị cấp n kí hiệu là I_n.

Ví dụ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ lần lượt là các ma trận đơn vị cấp 2, cấp 3.

II.5. Ma trận cột: là ma trận chỉ có một cột.

II.6. Ma trận dòng: là ma trận chỉ có một dòng.

II.7. Ma trận-không: là ma trận có tất cả các phần tử đều bằng 0. Ma trận-không cấp $m \times n$ kí hiệu là $O_{m\times n}$.

II.8. Ma trận bậc thang: là ma trận thoả mãn hai điều kiện sau đây

- dòng có tất cả các phần tử đều bằng 0 (nếu có) nằm phía dưới dòng có phần tử khác 0;
- phần tử khác *0* đầu tiên (tính từ trái sang phải) của mỗi dòng dưới nằm bên phải so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng trên.

Ví dụ. $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ là các ma trận bậc thang.

III. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN MA TRẬN

III.1. Tổng (hiệu) hai ma trận cùng cấp

Tổng hai ma trận cùng cấp $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ là một ma trận cùng cấp $C = \left[c_{ij}\right]_{m \times n}$ trong đó $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

Ký hiệu $C = A + B$.

Hiệu hai ma trận cùng cấp $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}, B = \left[b_{ij}\right]_{m \times n}$ là một ma trận cùng cấp $D = \left[d_{ij}\right]_{m \times n}$ trong đó $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Ký hiệu $D = A - B$.

Ví dụ . Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.

Thế thì $C = A + B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{D = A - B \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 9 & -6 & -5 \end{bmatrix}}$

Chú ý. Hai ma trận chỉ cộng, trừ được với nhau khi chúng có cùng cấp.

III.2. Tích của ma trận với một số

Cho số α và ma trận $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$. Tích của α với ma trận *A* là ma trận $B = \left[b_{ij}\right]$ cùng cấp với *A* trong đó $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ (nói cách khác, *B* thu được từ *A* bằng cách nhân mọi phần tử của *A* với α)

Kí hiệu $B = \alpha A$.

Ví dụ. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \alpha = 2$. Thế thì $B = 2A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Ví dụ. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 8 & 5 & -4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$. Tìm các ma trận sau:

a) *3A* b) - *4B* c) *2A + 3B* d) - *4A + 2B*

III.3. Tích của hai ma trận

Cho hai ma trận $A = \left[a_{ip} \right]_{m \times k}, B = \left[b_{pj} \right]_{k \times n}$. Tích của ma trận *A* với ma trận *B* là ma trận $C = \left[c_{ij} \right]_{m \times n}$ cấp m × n trong đó phần tử c_{ij} được tính theo công thức

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}.$$

Kí hiệu *C = AB*.

Ví dụ. Cho hai ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Thế thì $C = AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ là ma trận vuông cấp hai. Ta tính các phần tử của C.

Ta có

$c_{11} = 1.2 + (-2).(-1) + 3.4 = 16$ $c_{12} = 1.3 + (-2).1 + 3.2 = 7$

$c_{21} = 4.2 + 0.(-1) + 2.4 = 16$ $c_{22} = 4.3 + 0.1 + 2.2 = 16$

Vậy $C = \begin{bmatrix} 16 & 7 \\ 16 & 16 \end{bmatrix}$.

Ví dụ. Thực hiện phép nhân hai ma trận sau đây:

a) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Chú ý

- Hai ma trận chỉ nhân được với nhau khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số dòng của ma trận thứ hai.

- Muốn tìm phần tử ở dòng i, cột j của ma trận tích $C = AB$, ta nhân các phần tử ở dòng i của ma trận A lần lượt với các phần tử ở cột j của ma trận B rồi cộng các tích đó lại.

- Phép nhân hai ma trận không có tính chất giao hoán (nói chung là $AB \neq BA$, thậm chí có khi tồn tại AB nhưng không tồn tại BA).

Ví dụ : Thực hiện các phép toán sau

a) $2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}^t . \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}^t$

d) $5\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$

§2. ĐỊNH THỨC

I. KHÁI NIỆM

I.1. Định thức cấp một: là định thức của ma trận vuông cấp một $A = [a_{11}]$, ký hiệu detA hay $|A|$, được tính như sau :

$$det\,A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Ví dụ 1. $A = [4], detA = 4; B = [-3], \det B = -3$

I.2. Định thức cấp hai: cho ma trận vuông cấp hai $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Định thức của A, gọi là định thức cấp 2, ký hiệu *detA* hay $|A|$, là số được tính theo công thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Ví dụ 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \det A = 2.7 - 4.3 = 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-3).2 - 5.4 = -26$$

I.3. Định thức cấp ba: cho ma trận vuông cấp ba $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Định thức của *A*, gọi là định thức cấp 3, ký hiệu *det A* hay |*A*|, là số được tính theo công thức:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{matrix}$$

Ví dụ 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 2.1.1 + (-1).2.(-3) + 3.0.2 - \\ -(-3).1.3 - 2.2.2 - 1.0.(-1) = 9 \end{matrix}$$

Ví dụ 4. Tính các định thức sau

a) $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

II. CÁC TÍNH CHẤT

Định thức cấp bất kì có các tính chất sau đây.

1. $\det A = \det A^t$ ***(Hai ma trận chuyển vị có định thức bằng nhau).***

   Ví dụ 5. $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. ***Định thức có một dòng gồm toàn số 0 thì bằng 0.***

   Ví dụ 6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

3. ***Định thức có hai dòng giống nhau hoặc tỉ lệ với nhau thì bằng 0.***

   Ví dụ 7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$

4. ***Nếu nhân một dòng với một số α thì định thức cũng được nhân lên với α. Suy ra: nhân tử chung của một dòng có thể đem ra ngoài định thức.***

   Ví dụ 8. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

5. ***Nếu đổi chỗ hai dòng bất kì thì định thức đổi dấu.***

Ví dụ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. ***Định thức không hay đổi nếu cộng các phần tử của một dòng với các phần tử tương ứng của dòng khác đã được nhân với cùng một số***
(Định thức không hay đổi, nếu thay một dòng bởi tổng của dòng đó với bội của một dòng khác)

Ví dụ 9. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

7. ***Định thức của ma trận tam giác bằng tích các phần tử thuộc đường chéo chính.***

Ví dụ 10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1.4.6;\quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 2.4.7$

8. ***Các tính chất trên vẫn đúng khi thay chữ "dòng" bởi chữ "cột".***

III. TÍNH ĐỊNH THỨC BẰNG CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI SƠ CẤP TRÊN MA TRẬN

Sử dụng các tính chất trên, ta có thể tính được một định thức cấp cao bằng cách biến đổi để đưa nó về định thức tam giác. Muốn thế, ta sử dụng các phép biến đổi sau đây:

- *Đổi chỗ hai dòng tuỳ ý của ma trận.*
- *Nhân tất cả các phần tử của một dòng với một số khác 0.*
- *Cộng vào một dòng các phần tử tương ứng của dòng khác đã được nhân với cùng một số.*

Các phép biến đổi này gọi là phép biến đổi sơ cấp dòng. Tương tự, thay chữ "dòng" bởi chữ "cột", ta có các phép biến đổi sơ cấp cột. Những phép biến đổi sơ cấp dòng và cột gọi chung là phép biến đổi sơ cấp trên ma trận.

Ví dụ 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 8 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 8$

Ví dụ 12.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -8 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 36 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 40 \end{vmatrix} = 160$$

Ví dụ 13. Tính định thức của ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \\ 0 & -4 & 7 & \_7 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & -25 & 21 \\ 0 & 0 & -25 & 21 \end{vmatrix} = 0$$

Ví dụ 14. Hãy tính các định thức sau

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix};\ b)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix};\ c)\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix};\ d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

§3. MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

I. KHÁI NIỆM

Định nghĩa: **Cho** $A = \left[a_{ij} \right]_{n \times n}$ là ma trận vuông cấp n. Ma trận *B* thỏa mãn điều kiện $AB = BA = I_n$ được gọi là ma trận nghịch đảo của *A* và kí hiệu là $B = A^{-1}$.

Chú ý: Nếu $B = A^{-1}$ thì $B^{-1} = A$. Do đó ta còn nói *A* và *B* là các ma trận nghịch đảo của nhau.

Định nghĩa: Nếu ma trận *A* có ma trận nghịch đảo A^{-1} thì ta nói *A* là ma trận khả nghịch, hay khả đảo.

II. ĐIỀU KIỆN KHẢ NGHỊCH

Định lý 1: Ma trận vuông *A* khả nghịch, nếu và chỉ nếu $\det A \neq 0$. Khi đó : $A^{-1} = \frac{1}{\det A} P_A^t$, với $P_A = [A_{ij}]$ (gọi là ma trận phụ hợp của *A*).

Ví dụ 1. Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ khả nghịch vì $\det A = 1 \neq 0$.

Ví dụ 2. Các ma trận sau đây có khả nghịch không?

$$a)\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix};\ b)\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 3. Tìm *a* để ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ khả nghịch.

III. PHƯƠNG PHÁP TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO

Sử dụng định lý 1

Để tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông *A*, ta cần:

- Tính *detA*
- Nếu *detA* = *0* thì kết luận ma trận *A* không khả nghịch.
- Nếu *detA* ≠ *0* thì kết luận *A* khả nghịch và chuyển sang bước 2.
- Tính phần bù đại số của tất cả các phần tử $a_{ij} \in A$.
- Lập ma trận phụ hợp từ các phần bù đại số thu được $P_A = [A_{ij}]$.
- Lập ma trận nghịch đảo $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} P_A^t$.

Ví dụ 4. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Ta có

$$\det A = 1; A_{11} = 3, A_{12} = -1, A_{21} = -2, A_{22} = 1$$

$$\Rightarrow \quad P_A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ví dụ 5. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ta có

$$\det A = -6; A_{11} = 11, A_{12} = -12, A_{13} = -7, A_{21} = -7,$$

$$A_{22} = 6, A_{23} = 5, A_{31} = -1, A_{32} = 0, A_{33} = -1;$$

$$\Rightarrow \quad P_A = \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \tfrac{1}{-6} \begin{bmatrix} 11 & -12 & -7 \\ -7 & 6 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -\frac{11}{6} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ 2 & -1 & 0 \\ \frac{7}{6} & \frac{-5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Ví dụ 7. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây bằng phương pháp định thức

$$a) A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \qquad b) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

§4. HẠNG CỦA MA TRẬN

I. KHÁI NIỆM

I.1. Định thức con

I.2. Hạng của ma trận: Ta nói hạng của ma trận *A* là *p* nếu trong *A* có một định thức con khác *0* cấp *p* và các định thức con cấp cao hơn *p* đều bằng *0*.

Khi đó ta viết $rank(A) = p$ hoặc $r(A) = p$.

Như vậy, hạng của ma trận là cấp cao nhất của định thức con khác *0* của nó.

Từ định nghĩa trên ta suy ra :

- ✓ Hạng của một ma trận không thể vượt quá số dòng và số cột của ma trận.
- ✓ Khi *A* là ma trận vuông và $detA \neq 0$ thì $r(A)$ bằng chính cấp của *A*.

II. TÍNH CHẤT

1. Hạng của ma trận bậc thang bằng số dòng có phần tử khác *0* của nó.
2. Mọi phép biến đổi sơ cấp không làm thay đổi hạng của ma trận.
3. $r(A) = r(A^t)$

Từ hai tính chất đầu, ta có phương pháp tìm hạng của ma trận:

Để tìm hạng của một ma trận, ta biến đổi nó thành ma trận bậc thang dòng và áp dụng các tính chất để kết luận.

Ví dụ 2. Tìm hạng của ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.

Ta biến đổi ma trận đã cho thành ma trận bậc thang:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

A' là ma trận bậc thang.

Theo tính chất 2, ta có $rank(A) = rank(A')$;

Theo tính chất 1 ta lại có $rank(A') = 2$. Vậy $rank(A) = 2$.

Ví dụ 3. Tìm hạng của ma trận $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 8 \\ 3 & 2 & 8 & m+3 \\ 2 & 1 & 5 & m \end{bmatrix}$ theo tham số m.

Ta biến đổi C thành ma trận bậc thang:

$$C \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & m-6 \\ 0 & -1 & -1 & m-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & m-5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C'$$

Ta có $r(C) = r(C') = \begin{cases} 2 & khi \quad m = 5 \\ 3 & khi \quad m \neq 5 \end{cases}$

Ví dụ 4. Tìm hạng của các ma trận sau đây:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}; b)\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}; c)\begin{bmatrix} 3 & m & 0 & 1 \\ 6 & 2m & m & 2 \\ 9 & 3m & 0 & m+2 \\ 15 & 5m & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

BÀI TẬP CHƯƠNG I

1.1. Tính

a) $-5\begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 5 & 0 & 7 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -3 & 8 & 6 \\ 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$; **b)** $4\begin{bmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 4 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}^t - 3\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}^t$

1.2. Thực hiện phép toán sau đây đối với các ma trận

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}^t + 2\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; **b)** $-3\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -6 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

1.3. Tính : **a)** $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^3$; **b)** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}^2$

1.4. Tính định thức cấp ba sau đây:

a) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; $b)\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

1.5. Tìm ma trận nghịch đảo của các ma trận sau đây (nếu có)

$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$; $b) B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; **c)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

1.6. Tìm hạng của các ma trận sau đây:

$$a)\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}; \quad b)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & m \\ -2 & 8 & a \end{bmatrix}$$

CHƯƠNG II

HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

§1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

I. KHÁI NIỆM

I.1. Hệ phương trình tuyến tính: là hệ phương trình có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

trong đó a_{ij}, b_i là các số cho trước, x_j là các ẩn số ($i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$)

Trong hệ (1) ta thấy có m phương trình và n ẩn số.

Đặt $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ gọi là ma trận các hệ số của ẩn,

$B = \left[b_i\right]_{m\times 1}$ gọi là ma trận các hệ số tự do,

$X = \left[x_i\right]_{n\times 1}$ gọi là ma trận các ẩn số.

Khi đó hệ phương trình (1) được viết ở dạng ma trận :

$$AX = B \quad (2)$$

II. ĐIỀU KIỆN CÓ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Đặt $\overline{A} = \left[A|B\right]$, gọi là ma trận mở rộng của hệ phương trình (1), thu được bằng cách viết thêm ma trận B vào bên phải ma trận A.

Định lý 1: *Hệ phương trình (1) có nghiệm nếu và chỉ nếu $r(A) = r(\overline{A})$.*

Ví dụ. Xét hệ phương trình. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$

Ta có ma trận mở rộng:

$$\left[A|B\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 13 \end{array}\right] = \left[A'|B'\right]$$

Suy ra

$$r(A) = r(A') = 2; r(\overline{A}) = r(A'|B') = 2.$$

Vậy $r(A) = r(\overline{A})$ => Hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ. Hệ phương trình sau đây có nghiệm hay không?

$$a)\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 3 \end{cases} ;b)\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Giải : Ta tìm hạng của các ma trận tương ứng.

a)

$$[A|\,B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & -1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & -10 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = [A'|\,B']$$

Ta có $r(A) = r(A') = 2; r(\overline{A}) = r(A'|B') = 3$

Suy ra r(A) $\neq$ r($\overline{A}$).

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

b)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [A'|B']$$

Ta có $r(A) = r(A') = 3$, $r(\overline{A}) = r(A'|B') = 3$. Suy ra $r(A) = r(\overline{A})$

Vậy hệ phương trình có nghiệm.

Ví dụ. Hệ phương trình sau đây có nghiệm hay không?

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases}$$

III. SỐ NGHIỆM CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH

Định lý 2: Giả sử hệ phương trình (1) có nghiệm, nghĩa là $r(A) = r(\overline{A}) = k$.

Khi đó có hai trường hợp sau đây có thể xảy ra.

a) $r(A) = r(\overline{A}) = k = n$ (số ẩn của hệ phương trình)

Trong trường hợp này hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

b) $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$.

Trong trường hợp này hệ phương trình có vô số nghiệm.

IV. PHƯƠNG PHÁP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH (Phương pháp Gauss)

Để giải hệ phương trình tuyến tính ta thực hiện như sau :

Bước 1 : Kiểm tra điều kiện có nghiệm

Lập ma trận bậc thang $\overline{A} = [A \mid B]$, đưa nó về dạng bậc thang dòng và kiểm tra điều kiện có nghiệm.

- nếu $r(A) \neq r(\overline{A})$: kết luận hệ vô nghiệm
- nếu $r(A) = r(\overline{A})$: kết luận hệ có nghiệm. Chuyển sang bước 2.

Bước 2 : Tìm nghiệm

- nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ (số ẩn) : hệ phương trình có 1 nghiệm. Căn cứ vào ma trận bậc thang thu được ở bước 1, ta lập hệ phương trình mới và giải ngược từ dưới lên để tìm các ẩn số.
- nếu $r(A) = r(\overline{A}) = k < n$: hệ phương trình có vô số nghiệm.
  Trong khối bên trái của ma trận bậc thang thu được ở bước *1* chọn ra một định thức con khác *0* cấp k. k ẩn số tương ứng với các cột của định thức này được gọi là các ẩn chính của hệ phương trình, còn lại $n - k$ ẩn được gọi là ẩn tự do. Từ ma trận bậc thang đó ta cũng lập hệ phương trình mới và chuyển ẩn tự do sang vế phải. Sau đó giải ngược từ dưới lên để tìm các ẩn chính.
  Nghiệm tìm được gọi là nghiệm tổng quát của hệ phương trình. Cho ẩn tự do các giá trị tuỳ ý ta thu được tập hợp tất cả các nghiệm của hệ.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x + 2y - z + t = m \\ 2x + 5y - 2z + 2t = 2m + 1 \\ 3x + 7y - 3z + 3t = 1 \end{cases}$$